KOMPETENZZENTRUM FÜR
MATHEMATISCHE MODELLIERUNG IN
MINT-PROJEKTEN IN DER SCHULE

KOMMS Reports Nr. 2 (2016)

Reports zur Mathematischen Modellierung
in MINT-Projekten in der Schule

KOMMS
Kompetenzzentrum für
Mathematische Modellierung in
MINT-Projekten in der Schule

Haltestellenplanung in Städten - Ein Modellierungsprojekt mit vielseitigem Lösungsspektrum

Jana Kreckler

EUROPÄISCHER
SOZIALFONDS
Mehr Chancen für Rheinland-Pfalz

EUROPÄISCHE UNION
Europäischer Sozialfonds

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Zusammenfassung:
Die Planung von Bushaltestellen in Innenstädten ist ein authentisches Thema, welches sich für den Einsatz in einem realitätsbezogenen Unterricht in unterschiedlichen Klassenstufen eignet. Verschiedene Interessen und Gegebenheiten müssen in einem Modell und in einer Lösungsstrategie vereint werden. Durch eine sehr offen gewählte Fragestellung sind verschiedene Ansätze und Modelle möglich. Somit wird mathematisches Modellieren trainiert und das Durchlaufen eines Modellierungsprozesses in einem interessanten Projekt ermöglicht. Die mathematischen Hintergründe sowie das vielseitige Lösungsspektrum von Schülerinnen und Schülern unterschiedlicher Jahrgangsstufen zu derselben Fragestellung werden im Folgenden vorgestellt.

1 Die Problemstellung

Heutzutage sind moderne Verkehrsunter-nehmen mit vielfältigen Problemen bezüglich der Regelung des Verkehrs, der Sicherheit der Verkehrsteilnehmenden und einer optimalen Planung öffentlicher Verkehrs-mittel konfrontiert. Oftmals spielen dabei Faktoren wie die Einsparung von Zeit und Geld eine wichtige Rolle, um sowohl dem Unternehmen als auch den Reisenden das Leben zu erleichtern. Eine grundlegende Problemstellung, die bei der Planung von Verkehrssystemen auftritt, ist das Positionieren von Bushaltestellen in städtischen Gebieten.

Die folgende Fragestellung dient als Auftakt zu einem Modellierungsprojekt bezüglich der Planung von Haltestellen:

Wo sollen Bushaltestellen in dem Straßen-netz der Kaiserslauterer[1] Innenstadt am besten platziert werden, um möglichst vielen Leuten ein bequemes Erreichen einer Busanbindung zu ermöglichen und gleichzeitig die Anzahl der Haltestellen zu minimieren?

2 Wie Mathematiker das Problem lösen

Seit vielen Jahren befassen sich Mathematiker weltweit mit der Problematik einer optimalen Planung von Haltestellen. Hierbei beeinflussen verschiedene Faktoren, wie Preisstrukturen, Reisekomfort, Reisezeiten und Fußwege zur nächsten Haltestelle die Attraktivität öffentlicher Verkehrsmittel für die Kunden. Da mit dem Bau jeder zusätzlichen Haltestelle neue Kosten anfallen, eine Busfahrt durch viele Zwischenhalte verlängert wird, andererseits jedoch die Wege der Reisenden zu und von den Haltestellen bei einer geringeren Anzahl an Haltestellen verlängert werden, muss eine Lösung für dieses Dilemma gefunden werden.

[4] beschäftigten sich mit der Optimierung öffentlicher Verkehrsmittel in Brisbane, Australien. Als Toleranzgrenze, innerhalb welcher Fußgänger eine Bushaltestelle nutzen, wurde eine Entfernung von 400m in Städten ermittelt. Sie stellten fest, dass mit dieser Annahme ca. 92% der existierenden Bushaltestellen in Brisbane überflüssig waren. Eine verringerte Anzahl der Haltestellen konnte dort also zu einer erheblichen Einsparung von Reisezeiten und Wartungskosten und somit auch zu einer Erhöhung der Kundenzahlen führen. Dies macht deutlich, wie wichtig eine effektive und optimierte Planung von Haltestellen sowohl für die Unternehmen als auch für die Kunden sein kann.

Die Vorgehensweise zum Lösen solch einer offenen Fragestellung wird *Modellierungsprozess* genannt und kann idealisiert als Kreislauf dargestellt werden (vgl. [1]). Ein Modellierungsprozess gliedert sich in die Teilschritte *verstehen*, *vereinfachen*, *mathematisieren*, *lösen*, *interpretieren* und *validieren* auf. Dieser Prozessablauf sollte jedoch nur als Hilfestellung und nicht als eine strikte Vorgabe angesehen werden.

Es sei nun ein Verkehrsnetzwerk (die Straßen und Kreuzungen in einer Stadt) sowie eine endliche Anzahl von wichtigen Kundenstandorten, welche eine Haltestelle innerhalb eines gewissen Radius erreichen sollen, gegeben. Für eine Haltestellenplanung in diesem Szenario haben [5] einen Algorithmus entwickelt. Dieser wird im Folgenden erläutert, so dass die Lösungsstrategie schrittweise anhand des beschriebenen Modellierungsprozesses nachvollzogen werden kann.

[1] "Kaiserslautern" sollte in der Fragestellung in den jeweiligen Standort der Schule oder der nächstgele-genen Stadt geändert werden.

Verstehen

In diesem Teilschritt des Modellierungsprozesses wird das Problem erfasst. Welche Situation betrachtet wird und was genau gefragt ist, wird konkretisiert. In unserem Fall betrachten wir ein existierendes Verkehrsnetzwerk aus Straßen und Kreuzungen, an welchen noch keine Haltestellen existieren. Gesucht ist eine Strategie, wie Standorte für Bushaltestellen effektiv festgelegt werden können, so dass Kunden bequem eine Haltestelle erreichen können, die Anzahl dieser aber minimal gehalten wird.

Vereinfachen

Um eine Situation aus der Realität mathematisch beschreiben zu können, müssen zunächst vereinfachende Annahmen getroffen werden. Wir nehmen beispielsweise an, dass die Situation zweidimensional betrachtet werden kann und Entfernungen anhand der Luftlinie gemessen werden. Dies stellt eine Vereinfachung gegenüber der Realität (Fortbewegung auf Straßen) dar. Die Kunden bzw. Fahrgäste einer Stadt werden der Einfachheit halber auf große Kundenstandorte, wie zum Beispiel Schulen, Universitäten, Firmen oder Einkaufszentren, reduziert. Es wird weiterhin vereinfachend angenommen, dass alle so markierten Kundenstandorte gleich wichtig sind und ihnen innerhalb eines festgelegten Radius eine Haltestelle zur Verfügung stehen soll.

Mathematisieren

Die getroffenen Annahmen werden nun genutzt, um die Situation mathematisch zu beschreiben. Das Straßennetz wird als Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge V (Kreuzungen) und Kantenmenge E (Straßen) in der Ebene dargestellt, die Kundenstandorte als Punkte $p_i = (x_i, y_i)$ in $\mathbb{R}^2$. In Abbildung 2.1 wird dies exemplarisch am Beispiel von Kaiserslautern gezeigt. Der eingezeichnete Graph beinhaltet lediglich die Straßen, welche von Linienbussen befahren werden können.
Als Entfernungsmessung wird die Euklidische Distanz l_2 gewählt. Der Radius, innerhalb welchem die Kunden eine Haltestelle erreichen sollen, wird mit $r > 0$ bezeichnet. Ein Kreis mit Radius r um einen Kundenstandort p_i wird mit $B_{(p_i)}^r$ bezeichnet. Die Menge aller Punkte auf den Kanten des Graphen G wird T genannt und fasst alle Standorte für mögliche Haltestellen zusammen.

Lösen

Der Algorithmus nach [5] zur Lösung der beschriebenen Problematik konstruiert zunächst Kreise $B_{(p_i)}^r$ mit Radius r um alle Kundenstandorte. Die Schnittpunkte dieser Kreise mit den Kanten des Graphen (d.h. mit den Straßen des Verkehrsnetzwerkes) definieren gemeinsam mit den Knoten des Graphen (d.h. mit den Kreuzungen) aus der unendlichen Menge T eine endliche Menge S_{cand} von Kandidaten für Haltestellen (siehe Abbildung 2.2).
Diese Kandidaten werden bezüglich der Anzahl der Kundenstandorte, welche sie innerhalb der Entfernung r erreichen können, sortiert. Beginnend mit dem Kandidaten, welcher die meisten Kundenstandorte in einem Umkreis von r erreicht, werden die Standorte für Haltestellen ausgewählt, bis alle Kundenstandorte abgedeckt sind. Das Ergebnis für das Beispiel in Kaiserslautern wird in Abbildung 2.3 gezeigt.
Die Mathematisierung und Lösung sowie weitere Hintergründe der Haltestellenproblematik werden unter anderem in [2] und [3] ausführlich zusammengefasst.

Interpretieren

Bei der Interpretation der Lösung wird die Bedeutung dieser in Bezug auf das ursprüngliche reale Problem untersucht. Die Lösung besteht in diesem Fall aus Punkten in $\mathbb{R}^2$ auf dem Graphen G (in Abbildung 2.3 weiß markiert). Diese Punkte stellen Standorte im Straßennetz von Kaiserslautern dar. In diesem Straßenbereich sollte am Rand eine Haltestelle gebaut werden. Die ausgefüllten Kreise in Abbildung 2.3 markieren den Bereich, der von der entsprechenden Haltestelle innerhalb der Entfernung r erreicht werden kann.

Validieren

Im letzten Schritt des Modellierungsprozesses muss die Sinnhaftigkeit der erhaltenen Lösung überprüft werden. Hierbei muss das gewählte Modell kritisch betrachtet und analysiert werden. Werden Schwächen des Modells festgestellt, müssen die Annahmen entsprechend angepasst und der Modellierungsprozess erneut durchlaufen werden.
Eine Schwäche des obigen Modells ist beispielsweise die Annahme, dass Entfernungen in einer Stadt anhand der Euklidischen Distanz angegeben wurden. Die Verwendung der Rechteckentfernung als Approximation für Strecken entlang von Straßen wäre hierbei sinnvoller.

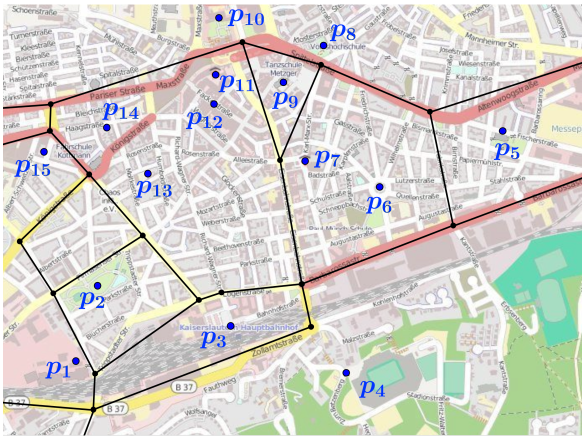

Abbildung 2.1: *Modellbildung am Beispiel von Kaiserslautern (Open Street Map, Open Database License)*

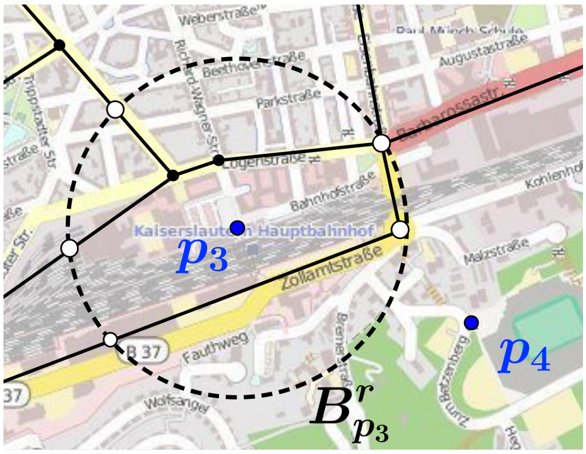

Abbildung 2.2: *Teilschritt des Lösungsprozesses (Open Database License)*

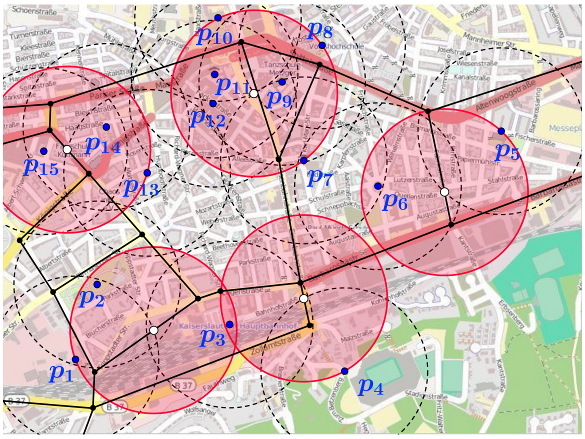

Abbildung 2.3: *Lösung nach Algorithmus von Schöbel et al. (Open Database License)*

3 Wie Schüler das Problem lösen

Die im ersten Abschnitt vorgestellte Fragestellung zur Haltestellenplanung wurde bereits mehrfach bei zweitägigen Modellierungsprojekten an Schulen in Rheinland-Pfalz gestellt und bearbeitet. Die Schülerinnen und Schüler (Jahrgangsstufen 10-13) hatten jeweils zwei volle Tage Zeit, um die Modellierungsaufgabe in einer kleinen Gruppe von drei bis fünf Schülern zu bearbeiten und eine Präsentation ihrer Ergebnisse vorzubereiten. Um einen Einblick in die Lösungsvielfalt der Problemstellung zu geben, werden im Folgenden verschiedene Lösungsansätze der Schülerinnen und Schüler vorgestellt. Wir unterscheiden hierbei zwei zentrale Ansätze, die Überdeckung der gesamten Fläche und die Überdeckung wichtiger Standorte.

3.1 Überdeckung der gesamten Fläche

Bei diesem Ansatz verfolgten die Schülerinnen und Schüler das Ziel, die gesamte Fläche eines ausgewählten Gebietes gleichmäßig mit Haltestellen abzudecken. Hierbei nahmen sie an, dass sich die Einwohner und potentiellen Kunden gleichmäßig über den Ort verteilt aufhalten.

Zunächst wurde ein Bereich des jeweiligen Stadtplans als Innenstadt definiert. Eine Schülergruppe der 10. Jahrgangsstufe nahm an, dass unter dem Aspekt der Bequemlichkeit eine Haltestelle innerhalb von fünf Gehminuten erreichbar sein sollte. Mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60m pro Minute, errechneten sie einen Einzugsbereich von 300m pro Bushaltestelle:

$$
\begin{aligned}
Entfernung &= Geschwindigkeit \cdot Zeit \\
&= 60m/min \cdot 5min = 300m.
\end{aligned}
$$

Des Weiteren trafen sie folgende Annahmen: Die Haltestellen sind für beide Richtungen verwendbar, Einbahnstraßen werden daher nicht im Modell betrachtet und die Entfernung von einem Standort zur nächsten Haltestelle wird anhand der Luftlinie definiert. Die Schülerinnen und Schüler wählten verschiedene Modelle, um eine Überdeckung zu gewährleisten. Die Ideen können in den folgenden drei Modellen zusammengefasst werden.

Kreismodell

Die Schülerinnen und Schüler einer 10. Jahrgangsstufe legten Kreise mit dem be-rechneten Radius über die Innenstadt und versuchten durch Ausprobieren die Überschneidung der Kreise so gering wie möglich zu halten (siehe Abbildung 3.1).

Eine Gruppe von Schülern der 12. Jahrgangsstufe ging hierbei etwas systematischer vor. Sie wählten zunächst einen zentralen Startpunkt A im Zentrum der Stadt (siehe Abbildung 3.2 und Abbildung 3.3). Um diesen zeichneten sie Kreise mit Radien in $200m$-Schritten. Sie nahmen an, dass alle Kunden nicht weiter als $200m$ zur nächsten Haltestelle gehen möchten.

Wie die Standorte der Haltestellen konstruiert wurden, wird exemplarisch in Abbildung 3.3 gezeigt. Auf dem ersten Kreis um A (Radius $200m$) wurden die Mittelpunkte von neuen Kreisen mit einem Radius von $200m$ konstruiert. Deren Schnittpunkte mit dem zweiten Kreis um A (Radius $400m$) definierten die neuen Haltestellen $H_1, H_2, \ldots$ Dadurch wurde eine maximale Entfernung von $400m$ zwischen benachbarten Haltestellen und ein maximaler Fußweg von $200m$ zur nächsten Haltestelle garantiert. Dieses Modell weiteten sie konzentrisch nach außen aus.

Dreiecksmodell

In einer 11. Klasse nutzten die Schülerinnen und Schüler eine Dreiecksstruktur, um die gesamte Fläche des Stadtplans gleichmäßig mit Haltestellen abzudecken (siehe Abbildung 3.4). Die Haltestellen wurden hierbei in den Knotenpunkten platziert.

Wabenmodell

Eine ähnliche Idee einer 12. Jahrgangsstufe kann als Wabenmodell zusammengefasst werden (siehe Abbildung 3.5). Die Schülerinnen und Schüler wählten eine gleichmäßige Wabenstruktur, um die Überschneidungen der Einzugsgebiete einzelner Haltestellen zu minimieren.

Eine gemeinsame Schwäche aller drei Modelle liegt in der Annahme, dass Entfernungen anhand der Luftlinie gemessen werden können. Eine Schülergruppe der 10. Jahrgangsstufe, welche das Kreismodell verwendete (Abbildung 3.1), versuchte die Entfernung von $300m$ von einer Haltestelle genauer zu modellieren. Dies realisierten sie mithilfe eines Fadens, mit welchem sie die realen Straßenwege von einer Haltestelle ausgehend abmaßen. Der weiße Punkt in der Mitte von Abbildung 3.6 definiert eine Haltestelle. Der Einzugsbereich von $300m$ ist sowohl für die Euklidische Entfernung (Kreis) als auch für die Entfernung entlang der Straßen (helles Vieleck) eingezeichnet.

Der Unterschied der beiden Ansätze wird hierbei sehr deutlich. Da die Entfernungsmessung entlang der Straßen in ein Einzugsgebiet annähernd in Form eines Quadrates mündet, kann die Rechteckentfernung als gute Approximation der Entfernung in Städten angesehen werden. Die Rechteckentfernung l_1 zweier Punkte $p_1 = (x_1, y_1)$ und $p_2 = (x_2, y_2)$ addiert die Abstände der x- und y-Koordinaten beider Punkte:

$$l_1(p_1, p_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

Alle Punkte in der Ebene, die von einem Standort die gleiche Rechteckentfernung haben, befinden sich dann nicht auf einem Kreis, sondern auf einem Quadrat.

3.2 Überdeckung wichtiger Standorte

Bei diesem Ansatz verfolgten die Schülerinnen und Schüler das Ziel zunächst wichtige Kundenstandorte der Stadt zu definieren und dann eine Überdeckung dieser Standorte innerhalb eines gewissen Radius zu gewährleisten.

Einige Schülergruppen gingen ähnlich vor wie der in Abschnitt 2 beschriebene Algorithmus von [5]. Sie zeichneten gleich große Kreise um alle Kundenstandorte und setzten dort Haltestellen, wo

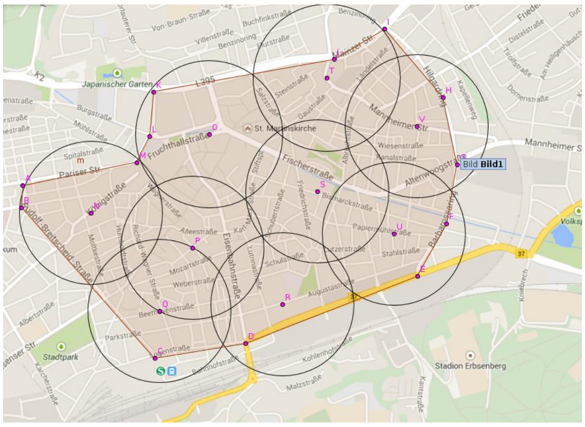

Abbildung 3.1: Schülerlösung Kreismodell (1)

sich möglichst viele Kreise überschneiden. Gegebenenfalls mussten die Haltestellen dann noch zur nächstgelegenen großen Straße verschoben werden, wenn der Standort auf eine zu kleine Straße fiel, in welcher kein Bus fahren kann.

Eine Schülergruppe der 11. Jahrgangsstufe verfeinerte diesen Ansatz, indem sie den Radius des Einzugsgebietes für jeden Kundenstandort individuell berechneten. Sie machten den Radius von der Wichtigkeit des Standortes abhängig. Diese wiederum war durch die Anzahl potentieller Kunden pro Tag definiert. Je höher die Anzahl der Kunden, desto wichtiger der Standort und desto kleiner der Radius, innerhalb dessen eine Haltestelle erreichbar sein soll. Der maximale Radius wurde auf $r_max = 400m$ gesetzt. Der individuelle Radius r_p eines Kundenstandortes $p \in \mathbb{R}^2$ mit b_p täglichen Kunden, wurde von den Schülerinnen und Schülern folgendermaßen berechnet:

$$r_p = r_max - 0.06 \cdot b_p.$$

Die Wahl des Faktors 0.06 wurde von den Schülerinnen und Schülern nicht näher begründet. Bei einem Standort mit einer Kundenzahl von 2000 Personen führt dies beispielsweise zu einem Radius von 280 Metern, innerhalb welchem von diesem Kundenstandort aus eine Bushaltestelle erreichbar sein soll (siehe Abbildung 3.7).

Sind um alle Kundenstandorte Kreise des entsprechenden Radius gezeichnet worden, werden Haltestellen wie zuvor dort platziert, wo die höchste Anzahl an Überschneidungen auftritt. Liegt dies allerdings in einer Fußgängerzone oder kleinen Seitenstraße, so wird die Haltestelle zur nächsten großen Straße verschoben. In Abbildung 3.8 wird eine Schülerlösung dieses Ansatzes gezeigt.

4 Tipps zur Betreuung und Umsetzung in der Schule

Das Thema "Haltestellenplanung in Städten" kann als Modellierungsaufgabe formuliert werden (siehe Abschnitt 1). Die offene Fragestellung lässt unterschiedliche Lösungsansätze zu und ermöglicht damit auch die Bearbeitung der gleichen Aufgabenstellung mit Schülerinnen und Schülern unterschiedlicher Klassenstufen.

Zur Bearbeitung der hier präsentierten Fragestellung sollten ein bis zwei Projekttage, beziehungsweise mindestens sechs bis acht Unterrichtsstunden zur Verfügung stehen.

Die Modellierungsaufgabe wird in kleinen Gruppen von drei bis maximal fünf Schülern bearbeitet, so dass das Diskutieren, Kommunizieren und Argumentieren angeregt wird.

Zur Bearbeitung benötigen die Schülerinnen und Schüler lediglich die Fragestellung sowie einen Laptop/Computer mit Internetzugang für weitere Recherchen und Bearbeitungsvorgänge.

Die Lehrkraft agiert während der gesamten Bearbeitungsphase nach dem *Prinzip der minimalen Hilfe*. Dies bedeutet, dass die Lehrkraft lediglich dann unterstützend eingreift, wenn eine Schülergruppe alleine nicht mehr weiter kommt. Eine Hilfestellung sollte motivieren und zu neuen Überlegungen anregen, jedoch keine konkreten Lösungsvorschläge liefern. Dies geschieht am besten durch Rückmeldungshilfen, wie zum Beispiel "Super, weiter so!",

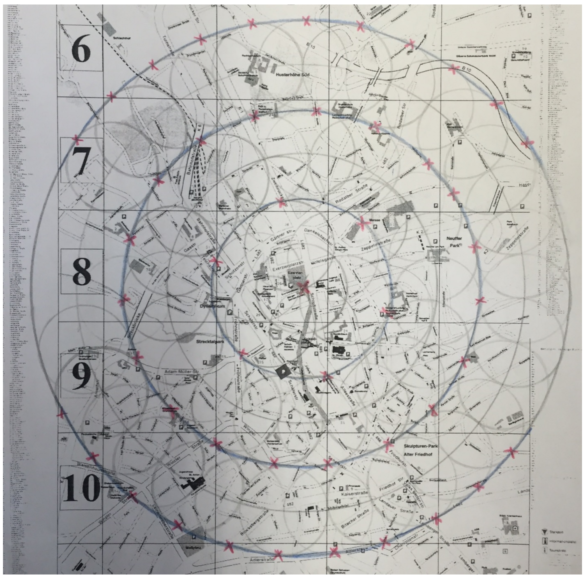

Abbildung 3.2: *Schülerlösung Kreismodell (2)*

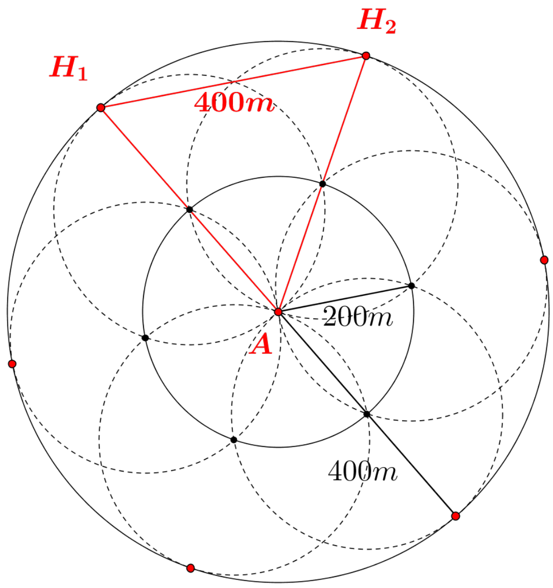

Abbildung 3.3: *Kreismodell (2) - Herleitung*

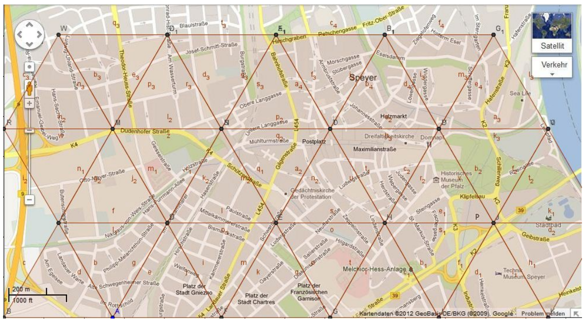

Abbildung 3.4: *Schülerlösung Dreiecksmodell*

Abbildung 3.5: *Schülerlösung Wabenmodell*

Abbildung 3.6: *Verbesserte Entfernungsmessung*

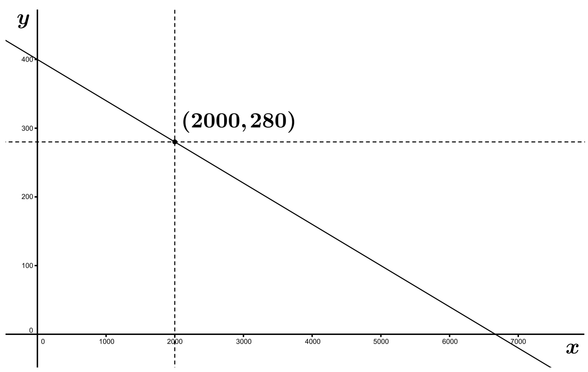

Abbildung 3.7: *Illustration von* $y = 400 - 0,06x$

Abbildung 3.8: Schülerlösung bezüglich der Überdeckung wichtiger Standorte

die Aufforderung die bisherige Strategie zu erklären oder geeignete allgemeine oder inhaltsorientierte strategische Hilfen, wie zum Beispiel "Trefft zunächst vereinfachende Annahmen" oder "Versucht, das Problem geometrisch zu betrachten".

Den Abschluss eines Modellierungsprojekts bilden die Schülerpräsentationen. Hier hat jede Schülergruppe die Möglichkeit ihre Strategie und Ergebnisse vorzustellen und im Plenum zu diskutieren.

5 Zusammenfassung und Fazit

Eine optimale Planung von Bushaltestellen in städtischen Gebieten ist sehr wichtig, um öffentliche Verkehrsmittel effektiv und für Kunden attraktiv zu gestalten. Hierbei ist den Kunden eine kurze Reisezeit sowie ein bequemes Erreichen der Bushaltestellen wichtig. Die Verkehrsunternehmen müssen außerdem darauf achten ihre Bau- und Wartungskosten möglichst gering zu halten. Die Anzahl der Haltestellen soll also minimiert werden.
Diese Problemstellung kann mit Schülerinnen und Schülern unterschiedlicher Klassenstufen bearbeitet werden und zu sehr unterschiedlichen Lösungsansätzen führen. Bei der Durchführung der Haltestellenproblematik mit Schülerinnen und Schülern der 10. bis 13. Jahrgangsstufe konnten die zwei zentralen Ansätze der *Überdeckung der gesamten Fläche* und der *Überdeckung wichtiger Standorte* identifiziert werden. Der Ansatz der Überdeckung der gesamten Fläche gliederte sich außerdem in die drei Ansätze Kreis-, Dreiecks- und Wabenmodell auf.
Alle Ansätze können sowohl geometrisch als auch analytisch betrachtet werden. Schülerinnen und Schüler höherer Jahrgänge können von der Lehrkraft darauf hingewiesen werden ihre geometrischen Konstruktionen auch analytisch zu beschreiben, da dies im Zusammenhang mit einer Implementierung am Computer sehr wichtig wird. Im Fall der Haltestellenplanung müssen Geraden- und Kreisgleichungen aufgestellt und Schnittpunkte berechnet werden. Eine exakte mathematische Arbeitsweise kann hierbei trainiert werden.

Während der Bearbeitungsphase geht die Lehrkraft auf die verschiedenen Ideen der Schülerinnen und Schüler ein. Das Unterrichtsgeschehen und die Ergebnisse sind somit sehr offen und nicht exakt vorhersagbar. Dies macht den Verlauf eines Modellierungsprojekts interessant und abwechslungsreich.

Das Thema der Haltestellenplanung eignet sich hervorragend als Modellierungsaufgabe für den Mathematikunterricht in der Schule, da es authentisch und aktuell ist, ein breites Lösungsspektrum zulässt und von Schülerinnen und Schülern aus unterschiedlichen Klassenstufen und mit verschiedenen mathematischen Voraussetzungen bearbeitet werden kann.

Literatur

[1] W. Blum and D. Leiß. Modellieren im Unterricht mit der Tanken-Aufgabe. *Mathematik Lehren*, 128:18–21, 2005.

[2] H. Hamacher and J. Kreußler. Merging Educational and Applied Mathematics: The Example of Locating Bus Stops. *CERME 8 - Proceedins of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pages 1087–1096, 2013.

[3] J. Kreckler. *Standortplanung und Geometrie. Mathematische Modellierung im Regelunterricht*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015.

[4] A. Murray, R. Davis, R. Stimson, and L. Ferreira. Public transportation access. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 3(5):319–328, 1998.

[5] A. Schöbel, H. Hamacher, A. Liebers, and D. Wagner. The Continuous Stop Location Problem in Public Transportation Networks. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 26(1):13–30, 2009.